საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია

ქართული ენციკლოპედიის ი. აბაშიძის სახელობის მთავარი სამეცნიერო რედაქცია

ზომის თეორია

ზომის თეორია, თანამედროვე მათემატიკური ანალიზის დარგი, რ-იც შეისწავლის ზომებს, ზომად ფუნქციებსა და ზომებით წარმოქმნილ ინტეგრალებს. X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რომელიმე A კლასზე მოცემულ □m ფუნქციას უწოდებენ ზომას, თუ ის თვლადად ადიტიურია, ე. ი. A-ში შემავალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეების ნებისმიერი სასრული ან თვლადი (An) მიმდევრობისათვის, რ-თვისაც:

$$A=\bigcup A_n,$$

სამართლიანია ტოლობა:

$$\mu(A)=\sum_n \mu(A_n).$$

ზომის განსაზღვრის არედ, ჩვეულებრივ, იღებენ ამა თუ იმ □-ალგებრას, ე.ი. ქვესიმრავლეთა ისეთ კლასს, რ-იც შეიცავს X-ს და ჩაკეტილია თვლადი გაერთიანებისა და დამატების ოპერაციების მიმართ. ამ □-ალგებრის ელემენტებს ზომად სიმრავლეებს უწოდებენ, მის მიმართ განისაზღვრება ფუნქციის ზომადობა, ხოლო ზომადი ფუნქციისათვის განისაზღვრება ინტეგრალი ზომის მიმართ. ზომის აბსტრ. ცნება წრირის სიგრძის, ბრტყელი ფიგურის ფართობისა და სივრცული სხეულის მოცულობის ცნებათა განზოგადებაა. მონაკვეთის სიგრძის ცნების განზოგადების პირველი ცდები რიცხვითი ღერძის ქვესიმრავლეთა უფრო ფართო კლასისათვის ეკუთვნით გერმ. მათემატიკოსებს: ო. შტოლცს, ა. ჰარნაკს და გ. კანტორს (1884–85), თუმცა მათ მიერ აგებული სიმრავლის ფუნქცია არ აღმოჩნდა ადიტიური. იტალ. მათემატიკოსმა ჯ. პეანომ (1887) და ფრანგმა მათემატიკოსმა კ. ჟორდანმა (1893) რიცხვითი ღერძის ქვესიმრავლეთა გაერთიანების ოპერაციის მიმართ ჩაკეტილ გარკვეულ კლასზე ააგეს სიმრავლის ადიტიური ფუნქცია, მაგრამ მათი კლასი არ შეიცავს ყველა შემოსაზღვრულ ღია სიმრავლეს, ხოლო მათი ფუნქცია არაა თვლადად ადიტიური.

ფრანგმა მათემატიკოსმა ე. ბორელმა პირველმა აღნიშნა (1898) თვლადი ადიტიურობის პირობის მნიშვნელობა. მან განიხილა რიცხვითი ღერძის ყველა ინტერვალით წარმოქმნილი □-ალგებრა (ბორელის □-ალგებრა) და მოგვცა მასზე ზომის განსაზღვრის სქემა. საბოლოოდ, ფრანგმა მათემატიკოსმა ა. ლებეგმა აჩვენა (1902), რომ არსებობს ბორელის □-ალგებრის შემცველი □-ალგებრა (ლებეგის □-ალგებრა) და ისეთი ზომა მასზე, რ-ის მნიშვნელობაც ნებისმიერ ინტერვალზე ემთხვევა ამ ინტერვალის სიგრძეს. ლებეგმა განსაზღვრა აგრეთვე ინტეგრალი მის მიერ შემოღებული ზომის მიმართ (ლებეგის ინტეგრალი) და შეისწავლა ამ ინტეგრალის თვისებები; მანვე მიიღო ანალოგიური შედეგები სასრულგანზომილებიანი სივრცეებისათვის. იტალ. მათემატიკოსმა ჯ. ვიტალემ აჩვენა (1905), რომ არსებობს, ლებეგის აზრით, არაზომადი სიმრავლე. ფრანგმა მათემატიკოსმა მ. ფრეშემ შემოიღო (1915) ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ზოგად □-ალგებრაზე განსაზღვრული ზომები და ინტეგრალები მათ მიმართ. ზ. თ. იყენებს სიმრავლეთა თეორიის ენას. ზ. თ-ის საბაზისო დებულებებია თეორემები ზომის გაგრძელების (ჰანი – კარათეოდორი), ორი ზომის ნამრავლის მიმართ ინტეგრების (ფუბინი), ზომების უსასრულო ნამრავლის (ანდერსენი – იენსენი), შეთანხმებული ალბათობების (ა. კოლმოგოროვი), აბსოლუტურად უწყვეტი ზომის წარმოდგენისა (რადონი – ნიკოდიმი) და ზომიანი სივრცეების იზომორფულობის შესახებ (ნოიმანი – ჰალმოში – როხლინი). არსებობს ზომის თეორიის აგების სხვა გზაც, რ-იც დაფუძნებულია არა ზომის, არამედ ინტეგრალის (როგორც განსაკუთრებული სახის ფუნქციონალის) ცნების აქსიომატიზაციაზე (ინგლისელი მათემატიკოსი პ. დანიელი, ფრანგ მათემატიკოსთა კოლექტივი „ნ. ბურბაკი"). ლებეგის ზომისა და ინტეგრალის გამოყენებამ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის განვითარების ახ. ეტაპს მისცა დასაბამი – ნათელი მოეფინა წარმოებულის მიხედვით ფუნქციის აღდგენისა და ტრიგონ. მწკრივების კრებადობის პირობების შესწავლის ამოცანებს; გაჩნდა ფუნქციათა მეტრიკული თეორია, რ-იც ფუნქციებს ზ. თ-ის ტერმინებით შეისწავლის. ზ. თ-ის თვალსაზრისით რიცხვების შესწავლამ წარმოშვა რიცხვთა მეტრიკული თეორია. ლებეგის ზომის მიმართ ინტეგრებადი ფუნქციების კლასების შესწავლამ მნიშვნელოვნად განაპირობა ფუნქციონალური ანალიზის წარმოქმნა. ზ. თ-ზეა დაფუძნებული ალბათობის მათ. თეორია (ა. კოლმოგოროვი , 1933); ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფებში ინვარიანტული ზომისა და ინტეგრალის აგება (უნგრელი მათემატიკოსი ა. ჰაარი, 1933) საფუძვლად დაედო აბსტრ. ჰარმონიული ანალიზის განვითარებას, ერგოდულობის თეორიასა და ინფორმაციის მათ. თეორიას. ზ. თ-ის ზოგიერთი პრობლემა მჭიდროდაა დაკავშირებული სიმრავლეთა თეორიისა და მათ. ლოგიკის საკითხებთან. ზოგად ტოპოლოგიურ სივრცეებში მოცემული ზომები თანამედროვე ალბათობის თეორიის, მათ. ანალიზისა და მათ. ფიზიკის მნიშვნელოვანი ობიექტებია. საქართველოში ზ. თ-სა და მის მომიჯნავე დარგებში მეცნ. მუშაობის დაწყება უკავშირდება ვ. ჭელიძის სახელს. გამოკვლეულია ორი ცვლადის ფუნქციის აღდგენის საკითხი წარმოებულის მიხედვით და, ამასთან დაკავშირებით, განზოგადებულია დანჟუას ინტეგრალის ცნება (ვ. ჭელიძე, ა. ჯვარშეიშვილი და სხვ.). შესწავლილია ლებეგის ზომის ინვარიანტული გაგრძელებებისა და სხვადასხვა სახის ინვარიანტული ზომების არსებობის საკითხები (შ. ფხაკაძე, ა. ხარაზიშვილი და სხვ.). შეისწავლება ფუნქციათა მეტრიკული

თეორიისა და ერგოდულობის თეორიის საკითხები (ო. წერეთელი და მისი მოწაფეები), ჯერადი ტრიგონ. მწკრივების კრებადობასა და შეჯამებადობასთან დაკავშირებული საკითხები (ლ. ჟიჟიაშვილი და მისი მოწაფეები). შესწავლილია სხვადასხვა ტიპის ზომების მიმართ ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცეებში (წონიან სივრცეებში) მოქმედი ინტეგრალური ოპერატორები (ვ. კოკილაშვილი და სხვ.), უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებში ალბათური ზომებისა და მათი მახასიათებლების აღწერის საკითხები (ნ. ვახანია და მისი მოწაფეები).

ლიტ.: В а х а н и я Н. Н., Т а р и е л а д з е В. И., Ч о б а н я н С. А., Вероятностные распределения в банаховых пространствах, М., 1985; Ж и ж и а ш в и л и Л. В., Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тб., 1969; К о к и л а ш в и л и В. М., Максимальные функции и сингулярные интегралы в весовых функциональных пространствах, Тб., 1985; П х а к а д з е Ш. С., К теории лебеговой меры, «Труды Тбилисского математического ин-та им. А. М. Размадзе», 1958, т. 25; Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; Х а р а з и ш в и л и А. Б., Инвариантные продолжения меры Лебега, Тб., 1983; მ ი ს ი ვ ე , Топологические аспекты теории меры, К., 1984; Ц е р е т е л и О. Д., Метрические свойства сопряженных функций, კრ.: «Современные проблемы математики», 1975, т. 7; მ ი ს ი ვ ე , Об эргодических свойствах граничных значений интеграла Шварца борелевской меры, «Труды Тбилисского математического ин-та им. А. М. Размадзе», 1985, т. 76.

ვ. ტარიელაძე